מכון טכנולוגי חולון
Holon Institute of Technology

מבני נתונים

תרגיל 2 – חישוב זמן ריצה של פונקציות

פתרונות:

1. א. לפי ההגדרה יש להוכיח כי קיימים $c, n_0 > 0$ כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים:

$$2n^2 + n + 10 \leq c \cdot n^2$$

נראה כי:

$$2n^2 + n + 10 \leq 2n^2 + n^2 + 10n^2 = 13n^2$$

לכן אם נבחר כעת את c להיות 13 ואת n_0 להיות 1 ונראה כי אכן לכל $n \geq 1$ מתקיים:

$$2n^2 + n + 10 \leq 13n^2$$

מש"ל הטענה נכונה עבור $c = 13$ ו- $n_0 = 1$.

ב. לפי ההגדרה יש להוכיח כי קיימים $c, n_0 > 0$ כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים:

$$3n^3 - 2n \leq c \cdot n^3$$

נראה כי:

$$3n^3 - 2n \leq 3n^3 + 2n \leq 3n^3 + 2n^3 = 5n^3$$

לכן אם נבחר כעת את c להיות 5 ואת n_0 להיות 1 ונראה כי אכן לכל $n \geq 1$ מתקיים:

$$3n^3 - 2n \leq 5n^3$$

מש"ל הטענה נכונה עבור $c = 5$ ו- $n_0 = 1$.

ג. לפי ההגדרה יש להוכיח כי קיימים $c, n_0 > 0$ כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים:

$$500n + 100n^{1.5} + 50n\log_{10} n \leq c \cdot n^{1.5}$$

נראה כי:

$$500n + 100n^{1.5} + 50n\log_{10} n \leq 500n^{1.5} + 100n^{1.5} + 50n^{1.5} = 650n^{1.5}$$

לכן אם נבחר כעת את c להיות 605 ואת n_0 להיות 1 ונראה כי אכן לכל $n \geq 1$ מתקיים:

$$500n + 100n^{1.5} + 50n\log_{10} n \leq 650n^{1.5}$$

מש"ל הטענה נכונה עבור $c = 650$ ו- $n_0 = 1$.

ד. לפי ההגדרה יש להוכיח כי קיימים $c, n_0 > 0$ כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים:

$$n\log_2 n - n\log_3 n \leq c \cdot n\log_2 n$$

נראה כי:

$$n\log_2 n - n\log_3 n \leq n\log_2 n + n\log_3 n \leq n\log_2 n + n\log_2 n = 2n\log_2 n$$

לכן אם נבחר כעת את c להיות 2 ואת n_0 להיות 1 ונראה כי אכן לכל $n \geq 1$ מתקיים:

$$n\log_2 n - n\log_3 n \leq 2n\log_2 n$$

מש"ל הטענה נכונה עבור $c = 2$ ו- $n_0 = 1$.

הפקולטה למדעים
המחלקה למדעי המחשב
Faculty of Sciences
Department of Computer Science

גולומב 52, ת.ד 305, חולון 58102
טלפון 03-5026528, פקס' 03-5026733
52 Golomb St., Holon 58102 Israel
www.hit.ac.il Tel. 972-3-502-6528, Fax. 972-3-502-6733

ה. לפי ההגדרה יש להוכיח כי קיימים $c, n_0 > 0$ כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים:

$$2n + n^{0.5} + 0.5n^{1.25} \geq c \cdot n^{0.5}$$

נראה כי:

$$2n + n^{0.5} + 0.5n^{1.25} \geq 2n^{0.5} + n^{0.5} + 0.5n^{0.5} = 3.5n^{0.5}$$

לכן אם נבחר כעת את c להיות 3.5 ואת n_0 להיות 1 ונראה כי אכן לכל $n \geq 1$ מתקיים:

$$2n + n^{0.5} + 0.5n^{1.25} \leq 3.5n^{0.5}$$

מש"ל הטענה נכונה עבור $c = 3.5$ ו- $n_0 = 1$.

ו. לפי ההגדרה יש להוכיח כי קיימים $c, n_0 > 0$ כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים:

$$0.01n^2 - 100n \geq c \cdot n$$

נראה כי השיטה שעשינו עד כה לא תעבוד כאן:

$$0.01n^2 - 100n \geq 0.01n^2 - 100n^2 = -99.99n^2$$

בשלב זה אין c שניתן לבחור, לכן לא נוכל לפתור בצורה הזו.

נעביר אגף:

$$0.01n^2 - 100n \geq c \cdot n \Rightarrow 0.01n^2 \geq (100 + c)n$$

נחלק את שני האגפים ב-0.01 :

$$n^2 \geq \frac{(100 + c)n}{0.01} = 100(100 + c)(n) = (10000 + c)n$$

כעת בעצם מספיק לבחור c כלשהו, ולגלות עבור איזה n_0 הטענה מתקיימת.

נבחר את c להיות 1 :

$$n^2 \geq 10001n$$

לכן אם נבחר כעת את n_0 להיות 10001 נראה כי אכן לכל $n \geq 10001$ מתקיים:

$$0.01n^2 - 100n \geq n$$

מש"ל הטענה נכונה עבור $c = 1$ ו- $n_0 = 10001$.

הפקולטה למדעים
המחלקה למדעי המחשב
Faculty of Sciences
Department of Computer Science
גולומב 52, ת.ד 305, חולון 58102
טלפון 03-5026528, פקס' 03-5026733
52 Golomb St., Holon 58102 Israel
www.hit.ac.il Tel. 972-3-502-6528, Fax. 972-3-502-6733

ז. לפי ההגדרה יש להוכיח כי קיימים $c, n_0 > 0$ כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים:

$$0.5n^4 + 3n^2 - 100\log_2 n \geq c \cdot \log_2 n$$

נראה כי:

$$0.5n^4 + 3n^2 - 100\log_2 n \geq c \cdot \log_2 n$$

על ידי העברת אגף נקבל:

$$0.5n^4 + 3n^2 \geq c \cdot \log_2 n + 100\log_2 n = (c + 100)\log_2 n$$

ברור כי מתקיים:

$$(c + 100)n \geq (c + 100)\log_2 n$$

לכן נחפש עבור אילו ערכים יתקיים:

$$0.5n^4 + 3n^2 \geq (c + 100)n$$

נבחר שוב $c = 1$ ונקבל:

$$0.5n^3 + 3n \geq 101$$

נבצע את המניפולציה הבאה:

$$0.5n^3 + 3n \geq 0.5n + 3n = 3.5n \geq 101$$

סה"כ נקבל כי:

$$n \geq 101/3.5 = 202/7$$

לכן אם נבחר כעת את c להיות 1 ואת n_0 להיות 29 נראה כי אכן לכל $n \geq 29$ מתקיים:

$$0.5n^4 + 3n^2 - 100\log_2 n \geq \log_2 n$$

מש"ל הטענה נכונה עבור $c = 1$ ו- $n_0 = 29$.

הפקולטה למדעים
המחלקה למדעי המחשב
Faculty of Sciences
Department of Computer Science

גולומב 52, ת.ד 305, חולון 58102
טלפון 03-5026528, פקס' 03-5026733
52 Golomb St., Holon 58102 Israel
www.hit.ac.il Tel. 972-3-502-6528, Fax. 972-3-502-6733

ח. לפי ההגדרה יש להוכיח כי קיימים $c, n_0 > 0$ כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים:

$$100n\log_3 n + n^3 + 100n \geq c \cdot n$$

נראה כי:

$$100n\log_3 n + n^3 + 100n \geq 100n + n + 100n = 201n$$

לכן אם נבחר כעת את c להיות 201 ואת n_0 להיות 1 נראה כי אכן לכל $n \geq 1$ מתקיים:

$$100n\log_3 n + n^3 + 100n \geq 201 \cdot n$$

מש"ל הטענה נכונה עבור $c = 201$ ו- $n_0 = 1$.

ט. לפי ההגדרה יש להוכיח כי קיימים $c_1, c_2, n_0 > 0$ כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים:

$$c_2 \cdot n^3 \geq 100n^3 + 8n^2 + 5n \geq c_1 \cdot n^3$$

נראה כי:

$$100n^3 + 8n^2 + 5n \geq 100n^3$$

וגם

$$100n^3 + 8n^2 + 5n \leq 100n^3 + 8n^3 + 5n^3 = 113n^3$$

לכן מספיק לקחת את $c_1 = 100, c_2 = 113$ וגם $n_0 = 1$ ואז לכל $n \geq 1$ יתקיים:

$$113n^3 \geq 100n^3 + 8n^2 + 5n \geq 100n^3$$

מש"ל הטענה נכונה עבור $c_1 = 100, c_2 = 113$ ו- $n_0 = 1$.

י. לפי ההגדרה יש להוכיח כי קיימים $c_1, c_2, n_0 > 0$ כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים:

$$c_2 \cdot n^2 \geq 1.01n^2 - 15n + 150 \geq c_1 \cdot n^2$$

נראה כי:

$$1.01n^2 - 15n + 150 \geq 1.01n^2 - 15n$$

נרצה לבחור c שיקיים:

$$1.01n^2 - 15n \geq c_1 \cdot n^2 \Rightarrow 1.01n - 15 \geq c_1 \cdot n \Rightarrow n(1.01 - c_1) \geq 15$$

נבחר את $c_1 = 0.01$ ואז נחייב את n_0 להיות $n_0 \geq 15$.

נראה כי:

$$1.01n^2 - 15n + 150 \leq 1.01n^2 + 150 \leq 1.01n^2 + 150n^2 = 151.01n^2$$

לכן מספיק לקחת את $c_1 = 0.01, c_2 = 151.01$ וגם $n_0 = 15$ ואז לכל $n \geq 15$ יתקיים:

$$151.01n^2 \geq 1.01n^2 - 15n + 150 \geq 0.01n^2$$

מש"ל הטענה נכונה עבור $c_1 = 0.01, c_2 = 151.01$ ו- $n_0 = 15$.

יא. לפי ההגדרה יש להוכיח כי קיימים $c_1, c_2, n_0 > 0$ כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים:

$$c_2 \cdot \log_2 n \geq 0.003\log_4 n^2 + \log_2\log_2 n \geq c_1 \cdot \log_2 n$$

נראה כי:

$$0.003\log_4 n^2 + \log_2\log_2 n \geq 0.003\log_4 n^2 = 0.003\log_2 n$$

וגם

$$0.003\log_4 n^2 + \log_2\log_2 n \leq 0.003\log_4 n^2 + \log_2 n = 0.003\log_2 n + \log_2 n = 1.003\log_2 n$$

לכן מספיק לקחת את $c_1 = 0.003, c_2 = 1.003$ וגם $n_0 = 2$ ואז לכל $n \geq 1$ יתקיים:

$$113\log_2 n \geq 0.003\log_4 n^2 + \log_2\log_2 n \geq 100\log_2 n$$

מש"ל הטענה נכונה עבור $c_1 = 100, c_2 = 113$ ו- $n_0 = 2$.

גולומב 52, ת.ד 305, חולון 58102
טלפון 03-5026528, פקס' 03-5026733
52 Golomb St., Holon 58102 Israel
www.hit.ac.il Tel. 972-3-502-6528, Fax. 972-3-502-6733

יב. טענה זו נוכיח בשני חלקים:
תחילה נוכיח כי $\log_2(n!) = O(n\log_2 n)$ ואז נוכיח $\log_2(n!) = \Omega(n\log_2 n)$.

נוכיח $\log_2(n!) = O(n\log_2 n)$:
לפי ההגדרה יש להוכיח כי קיימים $c, n_0 > 0$ כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים:

$$\log_2(n!) \leq c \cdot n\log_2 n$$

נראה כי:

$$\log_2(n!) = \log_2(n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1) = \log_2(n) + \log_2(n-1) + \cdots + \log_2(1)$$
$$\log_2(n) + \log_2(n-1) + \cdots + \log_2(1) \leq \log_2(n) + \log_2(n) + \cdots + \log_2(n) = n\log_2(n)$$

מספיק לקחת $c = 1$ ו-$n_0 = 1$ והטענה מתקיימת תמיד לכל $n \geq 1$.

נוכיח $\log_2(n!) = \Omega(n\log_2 n)$:
לפי ההגדרה יש להוכיח כי קיימים $c, n_0 > 0$ כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים:

$$\log_2(n!) \geq c \cdot n\log_2 n$$

נראה כי:

$$\log_2(n!) = \log_2(n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1) = \log_2(n) + \log_2(n-1) + \cdots + \log_2(1)$$
$$\log_2(n) + \log_2(n-1) + \cdots + \log_2(1) \geq \log_2(n) + \log_2(n-1) + \cdots \log_2(n/2)$$
$$\log_2(n) + \log_2(n-1) + \cdots \log_2(n/2) \geq \log_2(n/2) + \log_2(n/2) + \cdots \log_2(n/2)$$
$$\log_2(n/2) + \log_2(n/2) + \cdots \log_2(n/2) = (n/2)\log_2(n/2) = (n/2)\log_2 n - (n/2)$$

נשאר להראות כי: $(n/2)\log_2 n - (n/2) \geq c \cdot n\log_2 n$.
ניקח $n_0 = 4$, ולכן $n \geq 4$. אזי נקבל:

$$\log_2 n \geq 2 \Rightarrow \frac{\log_2 n}{4} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{n\log_2 n}{4} \geq \frac{1}{2}n \Rightarrow \frac{n\log_2 n}{4} - \frac{1}{2}n \geq 0 \Rightarrow \frac{n\log_2 n}{2} - \frac{1}{2}n \geq \frac{n\log_2 n}{4}$$

סה"כ ביחד עם המשוואה הקודמת נקבל:

$$\log_2(n!) \geq (n/2)\log_2 n - (n/2) \geq n\log_2 n/4$$

לכן יש לבחור $c = 1/4$ ונקבל כי הטענה מתקיימת עבור כל $n \geq 4$.
הוכחנו כי $\log_2(n!) = O(n\log_2 n)$ וגם $\log_2(n!) = \Omega(n\log_2 n)$ אזי: $\log_2(n!) = \Theta(n\log_2 n)$.

גולומב 52, ת.ד 305, חולון 58102
טלפון 03-5026528, פקס' 03-5026733
52 Golomb St., Holon 58102 Israel
www.hit.ac.il Tel. 972-3-502-6528, Fax. 972-3-502-6733
הפקולטה למדעים
המחלקה למדעי המחשב
Faculty of Sciences
Department of Computer Science

2. א. טענה לא נכונה!

ניתן לראות בשימוש בגבולות כי: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2}{n}\right| = \infty$, כיוון שקיבלנו שהגבול הוא אינסוף לא קיים קבוע c כך שהגבול קטן ממנו, לכן הטענה שגויה.

ב. טענה לא נכונה!

ניתן לראות בשימוש בגבולות כי:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{15n-8n^2+25n^3}{n^2\log_2 n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{25n^3}{n^2\log_2 n}+\frac{15n-8n^2}{n^2\log_2 n} = \lim_{n\to\infty}\frac{25n}{\log_2 n}+\frac{15n-8n^2}{n^2\log_2 n} = \infty$$

כיוון שקיבלנו שהגבול הוא אינסוף לא קיים קבוע c כך שהגבול קטן ממנו, לכן הטענה שגויה.

ג. טענה לא נכונה!

ניתן לראות בשימוש בגבולות כי: $\lim_{n\to\infty}\frac{5+0.001n^3+0.025n}{n^3} = 0.001$. כיוון שהגבול לא שווה ל-0 הטענה איננה מתקיימת.

ד. טענה נכונה!

ניתן לראות בשימוש בגבולות כי: $\lim_{n\to\infty}\frac{2.5n^{1.75}+0.3n}{n^2} = 0$. כיוון שהגבול שווה ל-0 הטענה מתקיימת.

ה. טענה נכונה!

ניתן לראות בשימוש בגבולות כי: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2}{n^2\log_2 n-200n}\right| = 0$, כיוון שקיבלנו שהגבול הוא אפס כל קבוע c מקיים את התנאי, לכן הטענה נכונה.

ו. טענה נכונה!

ניתן לראות בשימוש בגבולות כי: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{200n-0.01n^2+0.0009n^3}\right| = 0$, כיוון שקיבלנו שהגבול הוא אפס כל קבוע c מקיים את התנאי, לכן הטענה נכונה.

ז. טענה נכונה!

ניתן לראות בשימוש בגבולות כי: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3-n} = 0$. כיוון שהגבול שווה ל-0 הטענה מתקיימת.

ח. טענה נכונה!

ניתן לראות בשימוש בגבולות כי: $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^4-n\log_2 n^2} = 0$. כיוון שהגבול שווה ל-0 הטענה מתקיימת.

ט. טענה לא נכונה!

ניתן לראות בשימוש בגבולות כי: $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\log_2 n^2}{n^2} = \infty$. כיוון שהגבול הוא אינסוף הטענה לא מתקיימת.

י. טענה נכונה!

ניתן לראות בשימוש בגבולות כי: $\lim_{n\to\infty}\frac{200n^4-n\log_2 15n^2}{n^4} = 200$. כיוון שהגבול קבוע הטענה מתקיימת.

הפקולטה למדעים
המחלקה למדעי המחשב
Faculty of Sciences
Department of Computer Science
גולומב 52, ת.ד 305, חולון 58102
טלפון 03-5026528, פקס' 03-5026733
52 Golomb St., Holon 58102 Israel
www.hit.ac.il Tel. 972-3-502-6528, Fax. 972-3-502-6733

3. א. נוכיח כי מתקיים $P(n) = O(n^k)$.
נוכיח על פי הגדרה:
$$P(n) = a_0n^0 + a_1n^1 + \cdots + a_kn^k \le a_0n^k + a_1n^k + \cdots + a_kn^k = n^k(a_0 + a_1 + \cdots + a_k)$$
נבחר $c = (a_0 + a_1 + \cdots + a_k)$ וגם $n_0 = 1$ ואז נקבל כי הטענה מתקיימת לכל $n \ge 1$.

ב. נוכיח כי מתקיים $P(n) = \Omega(n^k)$.
נוכיח על פי הגדרה:
$$P(n) = a_0n^0 + a_1n^1 + \cdots + a_kn^k \ge a_kn^k$$
נבחר $c = a_k$ וגם $n_0 = 1$ ואז נקבל כי הטענה מתקיימת לכל $n \ge 1$.

ג. הוכחנו את א' וב' ולכן נובע גם ש-$P(n) = \Theta(n^k)$.

4. נתון כי $f_1(n) = O(g_1(n))$ וגם $f_2(n) = O(g_2(n))$ לכן נוכל להסיק כי קיימים $n_{01}, n_{02}, c_1, c_2 > 0$ כך שהחל מ-$n > n_{01}$ ו-$n > n_{02}$ מתקיים:
$f_1(n) \le c_1 \cdot g_1(n)$ וגם $f_2(n) \le c_2 \cdot g_2(n)$.

א. טענה נכונה!
נבחר $n_0 = \max\{n_{01}, n_{02}\}$ ונחבר את זוג הביטויים, כלומר:
$$f_1(n) + f_2(n) \le c_1 \cdot g_1(n) + c_2 \cdot g_2(n)$$
נבחר $c = \max\{c_1, c_2\}$ ואז נקבל:
$$f_1(n) + f_2(n) \le c_1 \cdot g_1(n) + c_2 \cdot g_2(n) \le c \cdot g_1(n) + c \cdot g_2(n) = c\big(g_1(n) + g_2(n)\big)$$
לכן עבור c, n_0 שבחרנו ניתן לראות כי אכן מתקיים $f_1(n) + f_2(n) = O\big(g_1(n) + g_2(n)\big)$.
מש"ל.

ב. טענה לא נכונה!
דוגמא נגדית:
נבחר את הפונקציות הבאות המקיימות את הנתון:
$$f_1(n) = f_2(n) = n$$
$$g_1(n) = g_2(n) = n^2$$
נקבל כי: $f_1(n) + f_2(n) = 2n$ ו- $\max\{g_1(n), g_2(n)\} = g_1(n) = n^2$,
אבל קל לראות שלא מתקיים: $2n = \Omega(n^2)$.

ג. טענה לא נכונה!
דוגמא נגדית:
נבחר את הפונקציות הבאות המקיימות את הנתון:
$$f_1(n) = n, f_2(n) = n^3$$
$$g_1(n) = n^2, g_2(n) = n^4$$
נקבל כי: $f_1(n) + f_2(n) = n + n^3$ ו- $\min\{g_1(n), g_2(n)\} = g_1(n) = n^2$,
אבל קל לראות שלא מתקיים: $n + n^3 = O(n^2)$.

הפקולטה למדעים
המחלקה למדעי המחשב
Faculty of Sciences
Department of Computer Science
גולומב 52, ת.ד 305, חולון 58102
טלפון 03-5026528, פקס' 03-5026733
52 Golomb St., Holon 58102 Israel
www.hit.ac.il Tel. 972-3-502-6528, Fax. 972-3-502-6733

ד. טענה נכונה!
נבחר $n_0 = \max\{n_{01}, n_{02}\}$ ונחבר את זוג הביטויים, כלומר:
$$f_1(n) \cdot f_2(n) \le c_1 \cdot g_1(n) \cdot c_2 \cdot g_2(n)$$
נבחר $c = c_1 \cdot c_2$ ואז נקבל:
$$f_1(n) \cdot f_2(n) \le c_1 \cdot g_1(n) \cdot c_2 \cdot g_2(n) \le c_1 \cdot c_2 \cdot g_1(n) \cdot g_2(n) = c\big(g_1(n) \cdot g_2(n)\big)$$
לכן עבור c, n_0 שבחרנו ניתן לראות כי אכן מתקיים $f_1(n) + f_2(n) = O\big(g_1(n) \cdot g_2(n)\big)$.
מש"ל.

ה. טענה לא נכונה!
דוגמא נגדית:
נבחר את הפונקציות הבאות: $f_1(n) = g_1(n) = n$ ו- $f_2(n) = 2$ וגם $g_2(n) = 1$.
ניתן לראות כי אכן מתקיים $f_1(n) = O\big(g_1(n)\big)$ וגם $f_2(n) = O\big(g_2(n)\big)$ (ניתן להוכיח בעזרת גבולות).
אבל: $f_1(n)^{f_2(n)} = n^2$ בעוד ש- $g_1(n)^{g_2(n)} = n$, וקל לראות כי התנאי $n^2 = O(n)$ לא מתקיים.

5. א. טענה נכונה!
מספיק לקחת $c = 1$ ו-$n_0 = 1$ ונקבל כי אכן מתקיים: $f(n) \le f(n)$ לכל $n \ge 1$.
מש"ל.

ב. טענה לא נכונה!
ניקח $f(n) = n$ ו- $g(n) = n^2$, ניתן לראות כי $n = O(n^2)$ אבל $n^2 \ne O(n)$.

ג. טענה נכונה!
נתון כי $f(n) = O\big(g(n)\big)$ וגם $g(n) = O\big(h(n)\big)$, אזי קיימים קבועים c_1, c_2, n_{01}, n_{02} כך ש:
$f(n) \le c_1 \cdot g(n)$ וגם $g(n) \le c_2 \cdot h(n)$.
אזי ניתן לראות כי: $f(n) \le c_1 \cdot g(n) \le c_1 \cdot c_2 \cdot h(n)$,
אזי מספיק לקחת $c = c_1 \cdot c_2$ ו-$n_0 = \max\{n_{01}, n_{02}\}$ ונקבל כי התנאי מתקיים ואכן $f(n) = O\big(h(n)\big)$.
מש"ל.

ד. טענה נכונה!
נתון כי $f(n) = O\big(g(n)\big)$ וגם $g(n) = O\big(f(n)\big)$, אזי קיימים קבועים c_1, c_2 n_{01}, n_{02} כך ש:
$f(n) \le c_1 \cdot g(n)$ וגם $g(n) \le f(n) \cdot c_2$.
לפי הביטוי השני ניתן לקבל כי $g(n)/c_2 \le f(n)$.
במקרה זה מספיק לקחת $c_3 = 1/c_2$ ונקבל כי: $c_3 \cdot g(n) \le f(n) \le c_1 \cdot g(n)$.
ואכן עבור $n_0 = \max\{n_{01}, n_{02}\}$ ו- c_1, c_3 התנאי והטענה $f(n) = \Theta\big(g(n)\big)$ נכונה.
מש"ל.

הפקולטה למדעים
המחלקה למדעי המחשב
Faculty of Sciences
Department of Computer Science
גולומב 52, ת.ד 305, חולון 58102
טלפון 03-5026528, פקס' 03-5026733
52 Golomb St., Holon 58102 Israel
www.hit.ac.il Tel. 972-3-502-6528, Fax. 972-3-502-6733

6. א. נוכיח על פי הגדרה:

$$f_k(n) = k^0 + k^1 + \cdots + k^n$$

מתקבלת סדרה הנדסית כאשר: $a_1 = 1$, $a_n = k^n$ ו- $q = k$.
אזי:

$$f_k(n) = \frac{1(k^{n+1} - 1)}{k - 1} = \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1} \leq k^{n+1} - 1 \leq k^{n+1} = k(k^n)$$

מספיק לבחור $c = k$ ו-$n_0 = 1$ על מנת שהתנאי $f_k(n) \leq c \cdot k^n$ יתקיים לכל $n \geq 1$, ולכן הטענה $f_k(n) = O(k^n)$ נכונה.
מש"ל.

ב. כן הטענה מתקיימת!
נוכיח על פי הגדרה:

$$f_k(n) = k^0 + k^1 + \cdots + k^n \geq k^n$$

מספיק לבחור $c = 1$ ו-$n_0 = 1$ על מנת שהתנאי $f_k(n) \geq c \cdot k^n$ יתקיים לכל $n \geq 1$, ולכן הטענה $f_k(n) = \Omega(k^n)$ נכונה.